

# Chapitre II

## Etude du Prisme

### 1 - Introduction.

Dans ce chapitre on suppose connues les lois de Descartes.

On se propose d'étudier théoriquement le trajet d'un rayon lumineux à travers un prisme après réfraction sur les dioptrés d'entrée et de sortie.

Le problème du stigmatisme du prisme est complexe à résoudre et ne sera pas abordé ici.

### 2 - Définitions.

- On appelle prisme un milieu homogène transparent et isotrope limité par deux dioptrés plans non parallèles

La droite intersection des deux dioptrés est appelée arête du prisme.

Un plan perpendiculaire à l'arête du prisme est un plan de section principale.

La face opposée à l'arête du prisme est la base du prisme.

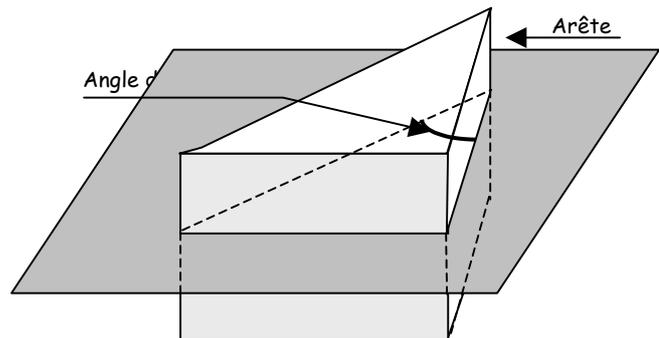


figure 1 : Le prisme.

Généralement le plan d'incidence d'un rayon arrivant sur le prisme, c'est à dire le plan contenant le rayon et la normale à la face du prisme, est confondu avec un plan de section principale. Dans ce cas on représente le prisme en coupe dans ce plan.

Le triangle ainsi formé a pour angle au sommet l'angle du prisme appelé A. figure 2

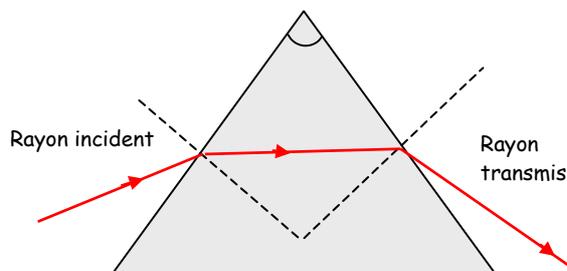


Figure 2 - Schéma du prisme



Rappelons que cet angle est défini par :  $n \sin i_{im} = 1$  d'où  $-i_{im} \leq r_2 \leq i_{im} = \text{Arcsin } 1/n$ . III.5

Cette double inégalité entraîne deux conditions :

**3.2.1 - Une condition sur l'angle du prisme :**

L'inégalité précédente :  $-i_{im} \leq r_2 \leq i_{im}$  compte tenu de  $A = r_1 + r_2$  s'écrit :  $-i_{im} \leq A - r_1 \leq i_{im}$

soit :  $r_1 - i_{im} \leq A \leq i_{im} + r_1$

Or l'angle  $r_1$  est inférieur également à l'angle limite  $r_1 \leq i_{im}$

A la limite on a donc l'inégalité suivante pour l'angle du prisme :

$$0 \leq A \leq 2 \cdot i_{im}$$

III.6

- En conclusion pour un prisme d'angle  $A$ , le rayon émergent n'existe que si :

$$0 \leq A \leq 2 \text{ Arcsin}(1/n)$$

**3.2.2 - Une condition sur l'angle d'incidence.**

La double inégalité précédente permet également de calculer la plus petite valeur de l'angle d'incidence qui, pour un prisme d'angle  $A$ , donne un émergent limite.

En effet :  $-i_{im} \leq r_2 \leq i_{im}$  avec  $A = r_1 + r_2$  l'inégalité s'écrit:  $A - i_{im} \leq r_1 \leq A + i_{im}$

La deuxième inégalité est toujours vraie puisque l'angle de réfraction est toujours inférieur à l'angle limite  $r_1 \leq i_{im}$  et que l'angle du prisme  $A$  est nécessairement positif.

La première inégalité n'est vraie à la limite  $r_1 = r_{0m}$  que si :  $\sin i_{0m} = n \sin r_{0m} \geq n \sin (A - i_{im})$

III.7

- Un rayon incident n'émerge du prisme que si son angle d'incidence vérifie :

$$i_{0m} = \text{Arcsin}[n \sin (A - i_{im})] \leq i_1 \leq \pi/2$$

**3.2.3 Représentation graphique:**

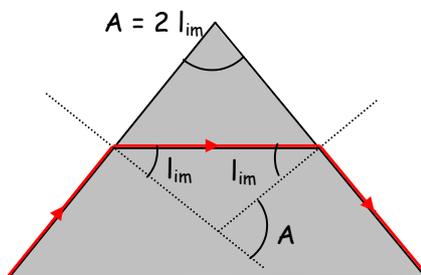


Figure 4 a - Seul le rayon tangent à la face d'entrée ( $I = 90^\circ$ ) peut émerger du prisme ( $i_{0m} = 90^\circ$ )

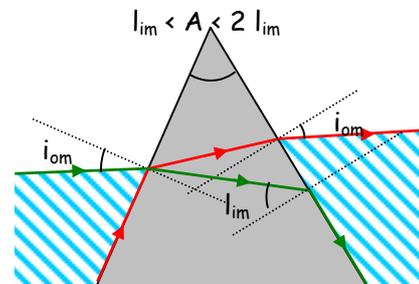


Figure 4 b - L'angle  $i_{0m}$  est positif

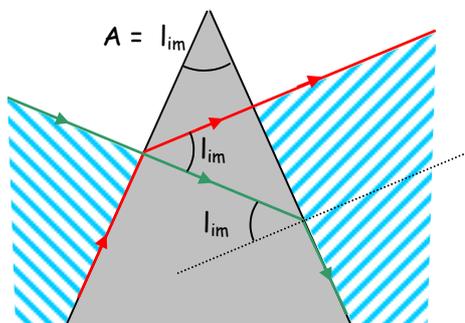


Figure 4c - Le faisceau de rayons incidents compris entre  $0$  et  $90^\circ$  peut émerger du prisme ( $i_{0m} = 0^\circ$ )

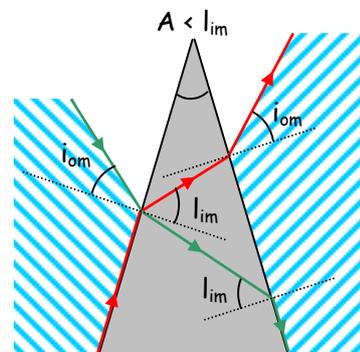


Figure 4 d - L'angle  $i_{0m}$  est négatif

**3.3 - Etude de la déviation**

La marche d'un rayon lumineux à travers un prisme est décrite par les 4 relations vues ci-dessus.

Ces relations montrent que la déviation  $D$  subie par le rayon incident dépend de l'angle d'incidence  $i_1$ , de l'indice de réfraction  $n$  du prisme ( lui même fonction de la longueur d'onde) et de l'angle  $A$  du prisme.

En différentiant par rapport à ces trois variables ( $i_1$ ;  $n$ ;  $A$ ) il vient :

$$\cos i_1 \, di_1 = n \cos r_1 \, dr_1 + dn \sin r_1 \quad \text{III.8}$$

$$\cos i_2 \, di_2 = n \cos r_2 \, dr_2 + dn \sin r_2 \quad \text{III.9}$$

$$dA = dr_1 + dr_2 \quad \text{III.10}$$

$$dD = di_1 + di_2 - dA \quad \text{III.11}$$

Par élimination de  $i_2$ ,  $r_1$ , et  $r_2$  entre ces équations il vient:

$$dD = \left[ 1 - \frac{\cos i_1 \cos r_2}{\cos i_2 \cos r_1} \right] di_1 + \left[ \frac{\sin A}{\cos i_2 \cos r_1} \right] dn + \left[ n \frac{\cos r_2}{\cos i_2} - 1 \right] dA \quad \text{III.12}$$

Soit :

$$dD = \left( \frac{\partial D}{\partial i_1} \right)_{n,A} di_1 + \left( \frac{\partial D}{\partial n} \right)_{i_1,A} dn + \left( \frac{\partial D}{\partial A} \right)_{i_1,n} dA \quad \text{III.13}$$

Dans la suite nous précisons les variables maintenues constantes au début de chaque étude et nous omettons de mentionner ces variables dans l'expression de la dérivée partielle calculée.

### 3.3.1 - Variation de la déviation en fonction de l'angle du prisme. ( $i_1$ et $n$ constants)

$$\text{On a d'après ce qui précède : } \frac{\partial D}{\partial A} = \left[ n \frac{\cos r_2}{\cos i_2} - 1 \right] \quad \text{III.14}$$

L'indice de réfraction étant supérieur à 1, l'angle  $i_2$  est toujours supérieur à  $r_2$  et, par suite,  $\cos i_2$  est inférieur à  $\cos r_2$ .

Il s'en suit que  $\frac{\partial D}{\partial A} > 0$

**- La déviation  $D$  est une fonction croissante de l'angle du prisme  $A$ .**

**Remarque :** Dans le cas de petits angles, angle du prisme  $A$  petit et angle d'incidence petit on a ( voir 2.3.4) :

$$D = (n-1) A \quad \text{d'où directement : } \frac{\partial D}{\partial A} > 0$$

### 3.3.2 - Variation de la déviation en fonction de l'indice du prisme. ( $i_1$ et $A$ constants)

$$\text{On a : } \frac{\partial D}{\partial n} = \left[ \frac{\sin A}{\cos i_2 \cos r_1} \right] \quad \text{( III. 15 ) l'angle } i_2 \text{ est compris entre } -90^\circ \text{ et } +90^\circ \text{ et il en est de même de l'angle } r_1.$$

Il s'en suit que  $\cos i_2$  et  $\cos r_1$  sont tous deux positifs. La dérivée partielle est donc positive.

**- La déviation est une fonction croissante de l'indice du prisme.**

### 3.3.3 - Variation de la déviation en fonction de l'angle d'incidence. ( $A$ et $n$ constants)

Les formules du prisme données ci-dessus permettent de tracer les variations de  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $i_2$  et  $D$  en fonction de  $i_1$  pour un prisme donné ( Angle  $A$  constant et indice  $n$  constant ).

On tracera ces variations dans le cas où  $A = 60^\circ$  et pour  $n = 3/2$ .

3.3.3.1 Etude analytique de la déviation

Pour faire cette étude on peut partir de la relation générale établie ci-dessus; mais ici nous donnerons une démonstration directe :

Par différentiation des formules du prisme, à A et n constants, il vient :

$$\cos i_1 \, di_1 = n \cos r_1 \, dr_1 \quad \text{III.16}$$

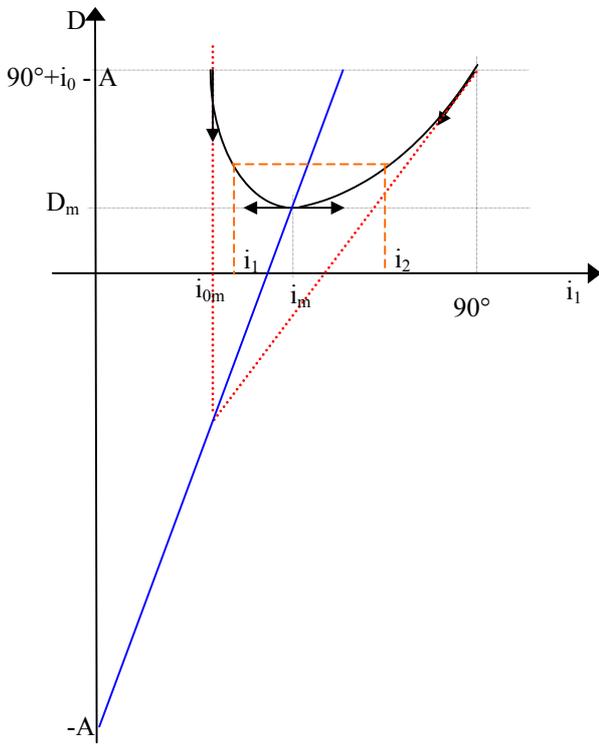
$$\cos i_2 \, di_2 = n \cos r_2 \, dr_2 \quad \text{III.17}$$

$$dD = di_1 + di_2 \quad \text{III.18}$$

$$0 = dr_1 + dr_2 \quad \text{III.19}$$

d'où :

$$\frac{dD}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{dr_1} \cdot \frac{dr_1}{di_1} = 1 - \frac{\frac{dr_1}{di_1}}{\frac{dr_2}{di_2}} \quad \text{III.20}$$



Etude des variations :

Les angles  $r_1$  et  $r_2$  varient en sens contraire (III.19) ; il en est de même des angles  $i_1$  et  $i_2$ .

Lorsque l'angle  $i_1$  varie de  $i_{0m}$  à  $90^\circ$ , l'angle  $i_2$  varie de  $90^\circ$  à  $i_{0m}$ .  
De plus  $\frac{dr_1}{di_1}$  est positif et décroît lorsque  $i_1$  croît en valeur absolue.

Si l'on fait croître  $i$  de  $i_0$  à  $90^\circ$   $i$  passe par la valeur  $i_m$  :

$$i_0 < i < i_m \quad |i_1| < i_2 \quad \frac{dr_1}{di_1} > \frac{dr_2}{di_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dD}{di_1} < 0$$

$$i_1 = i_2 = i_m \quad \frac{dr_1}{di_1} = \frac{dr_2}{di_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dD}{di_1} = 0$$

$$i_m < i_1 < \pi/2 \quad i_1 > |i_2| \quad \frac{dr_1}{di_1} > \frac{dr_2}{di_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dD}{di_1} > 0$$

Figure 5 - Variation de la déviation en fonction de l'angle d'incidence

Donc lorsque  $i$  croît depuis  $i_0$  la déviation décroît, passe par un minimum pour le trajet symétrique, puis augmente.

3.3.3.2 - Calcul du minimum de déviation

Calculons les valeurs des angles d'incidence, de réfraction et la déviation au minimum.

En utilisant la relation III.20 il vient :

$$dD = \frac{n \cos r_1}{\cos i_1} dr_1 + \frac{n \cos r_2}{\cos i_2} dr_2 \quad \text{III.21}$$

Le minimum de déviation s'obtient pour  $dD = 0$  ce qui implique :

$$\frac{\cos r_1}{\cos i_1} = \frac{\cos r_2}{\cos i_2} \quad \text{III.22}$$

La seule solution acceptable est  $i_1 = i_2$  d'où au minimum de déviation les angles de réfraction sont égaux et :  $r_1 = r_2 = A/2$

Et dans ce cas :

$$D_m = 2 i_m - A$$

d'où :

$$i_m = \frac{A + D_m}{2}$$

et

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

La figure 4 montre l'allure de la variation de la déviation en fonction de l'angle d'incidence. On notera les points importants suivants :

- tangente verticale en  $i_{om}$
- tangente horizontale au minimum de déviation  $i_o$
- tangente à  $45^\circ$  en  $i = 90^\circ$
- Valeur identique de la déviation :  $(D = 90^\circ + i_{om} - A)$  en  $i_{om}$  et  $90^\circ$

Il est vivement conseillé de tracer avec soin cette courbe à l'aide d'un calculateur.

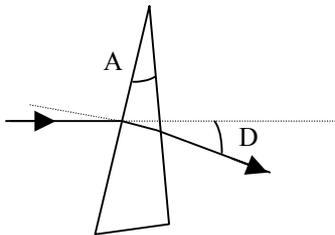
### 3.3.3.3 – Lieu des milieux des cordes de la courbe de déviation.

Les extrémités d'une corde horizontale ont pour abscisses  $i_1$  et  $i_2$ .

Le lieu du milieu de ces cordes est une droite en effet d'après (III.4) il vient :  $D = 2 \left( \frac{i_1 + i_2}{2} \right) + A$

Ce qui est bien l'équation d'une droite de pente 2 qui passe par le milieu des cordes et par le minimum de la courbe  $D=f(i_1)$ . De plus cette droite passe par le point  $i_1 = 0$  ;  $D = -A$ .

### 3.3.4 - Cas d'un prisme de petit angle sous incidence quasi normale.



Dans le cas de petits angles d'incidence :  $i_1 = n r_1$ .

Dans le cas où l'angle du prisme  $A$  est petit, l'angle  $r_2$  reste petit car :

$$A = r_1 + r_2 \quad \text{d'où} : \quad i_2 = n r_2$$

$$\text{et } D = i_1 + i_2 - A$$

$$\text{D'où} : \quad \boxed{D = (n-1) A}$$

## 4 - Applications du prisme

La valeur de l'angle du prisme  $A$  et son indice  $n$  sont deux paramètres fondamentaux qui conditionnent l'utilisation du prisme. Il est donc nécessaire de connaître ces deux grandeurs avec précision. La variation de l'indice du matériau constituant le prisme en fonction de la longueur d'onde ( courbe de dispersion) est également une donnée importante.

Ces déterminations sont réalisées à l'aide d'un goniomètre et les mesures ci-dessous seront toutes effectuées en travaux pratiques. On trouvera tous les détails dans le recueil de TP.

### 4.1 - Mesure de l'angle d'un prisme.

( Voir TP )

### 4.2 - Mesure de l'indice d'un prisme.

( Voir TP )

### 4.3 - Etude de la dispersion.

( Voir TP )

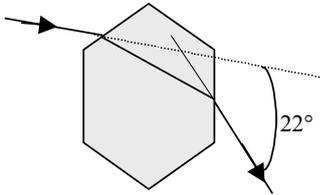
## 5- Prismes particuliers.

## 5.1 - Prismes à réflexion totale.

Le prisme étudié en travaux pratiques possède une base dépolie afin de ne pas laisser sortir les rayons qui accidentellement se réfléchissent sur la deuxième face.

Si la base est polie, il est possible de récupérer le rayon émergent par cette face, un tel prisme peut être utilisé comme miroir lorsque la réflexion qui a lieu sur la deuxième face est totale. Dans les instruments d'optique, ces prismes sont largement utilisés comme redresseurs d'image en remplacement de miroirs plus onéreux et plus fragiles.

### 5.1.1 - Le "faux soleil".

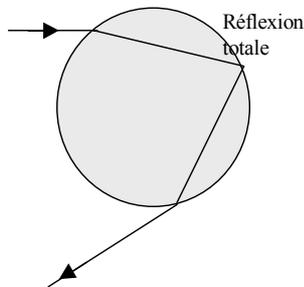


En haute altitude, l'eau est sous forme de glace et les cristaux de glace peuvent être constitués de petits hexagones de faible épaisseur.

Un rayon incident venant de la direction du soleil est dévié et le minimum de déviation est de l'ordre de  $22^\circ$ .

Ainsi, pour des angles d'incidence compris entre  $30^\circ$  et  $50^\circ$ , l'angle de déviation reste voisin de  $22^\circ$ . Il y a donc concentration de lumière de part et d'autre du soleil, d'où l'apparition de deux faux soleils ou parhélies.

### 5.1.2 - L'arc en ciel.



L'arc en ciel apparaît lorsque la lumière du soleil tombe sur des gouttes de pluie dans la direction opposée au soleil par rapport à l'observateur. On voit alors totalement ou partiellement un ou plusieurs arcs concentriques présentant les couleurs du spectre de la lumière solaire.

Le spectre provient de la déviation de la lumière solaire lors de la traversée du dioptré que forme une goutte d'eau. Cette déviation est fonction de l'indice de l'eau qui lui-même dépend de la longueur d'onde. La déviation sera donc différente pour des radiations de longueur d'onde différente d'où la formation d'un spectre.

Enfin ce spectre est souvent très lumineux car, comme l'a montré Descartes, il se produit une concentration des rayons émergents dans une direction voisine de  $42^\circ$ .

## 5.2 - Prisme isocèle à angle droit.

Ces prismes sont utilisés comme miroir. Un rayon incident sur la face d'entrée du prisme frappe l'hypothénuse sous  $45^\circ$  et subit donc une réflexion totale. Il émerge donc perpendiculairement à la face de sortie. Le rayon a subi une rotation de  $90^\circ$ .

En associant deux prismes on obtient une rotation de  $180^\circ$ ; une image peut ainsi être redressée (application dans les jumelles)

## 5.3 - Prismes d'Amici et de Dove.

Dans le prisme d'Amici on inverse simultanément haut-bas et droite-gauche.

Dans le prisme de Dove on renverse une image tout en conservant la même direction au faisceau.

## 5.4 - Coin de cube réflecteur.

Il réfléchit un faisceau incident dans une direction parallèle à l'incident mais dans le sens opposé, quelle que soit l'incidence. Ce prisme est utilisé dans les rétroreflecteurs.

-----